

## Criterios de Sintonización y Estabilidad del Control dEWMA-PID

Sergio Alberino<sup>1,2</sup>, Pablo D. Folino<sup>1</sup>, Claudio Verrastró<sup>1,3</sup>, Juan Carlos Gomez<sup>1,4</sup>

<sup>1</sup> Grupo de Inteligencia Artificial y Robótica UTN, Argentina,

<sup>2</sup> Instituto Universitario de la Policía Federal Argentina (IUPFA)

<sup>3</sup> CNEA, Comisión Nacional de Energía Atómica

<sup>4</sup> Instituto Nacional de Tecnología Industrial (INTI).

alberino@gmail.com; pfolino@gmail.com; cverra@cae.cnea.gov.ar; juanca@inti.gob.ar

**Resumen-** Se propone un sistema de Control adaptivo, donde la señal de entrada es estimada con un filtro basado en Promedios Móviles Ponderados Exponencialmente, ajustado dinámicamente (dEWMA) en combinación de un control Proporcional-Integral-Derivativo(dEWMA-PID).

Se estudia un método de ajuste de este controlador y se analizan las condiciones de estabilidad del sistema, para una planta genérica de segundo orden.

Este controlador presenta mayor simplicidad en su implementación, mayor inmunidad al ruido, reducción el sobreimpulso y un menor consumo del dispositivo actuador.

**Keywords**— PID, Moving Average, IIR, EWMA.

### 1. INTRODUCCION

En un trabajo anterior [1] se presentó un tipo de control digital con características similares a las del clásico control Proporcional-Integral-derivativo (PID), pero con la ventaja de tener una mejor respuesta en condiciones de ruido (en la medición de la variable a controlar), y sin la necesidad de implementar una rutina Anti-Windup.

El sistema propuesto aprovecha las propiedades de reducción de ruido del Promedio Móvil Ponderado Exponencialmente (PMPE) o Exponentially Weighted Moving Average (EWMA) y la posibilidad de ajuste dinámico del mismo de acuerdo a la condición de la planta, para optimizar la respuesta del Control PID.

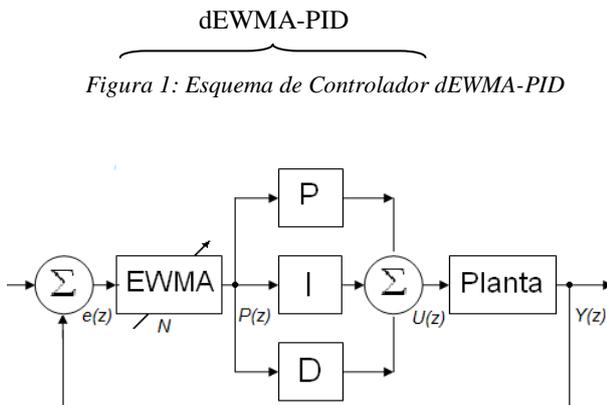


Figura 1: Esquema de Controlador dEWMA-PID

Se comparó el comportamiento del mismo frente a un algoritmo PID discreto, tomando distintos parámetros estáticos y dinámicos como referencia, y se pudo observar que, presentando características similares de comportamiento, el control dEWMA-PID ofrece mayor inmunidad al ruido, reducción el sobreimpulso y un menor consumo del dispositivo actuador, sin que por esto se evidencie una reducción en el desempeño dinámico del sistema [1].

Se analiza ahora, cuales son los pasos a seguir para una sintonía óptima y qué condiciones garantizan la estabilidad del sistema.

### 2. DESARROLLO

#### 2.1. Promedio Móvil Ponderado Exponencialmente

Este promedio móvil permite obtener una media de las muestras a medida que estas “van ingresando”, y su forma recursiva permite una implementación sencilla en microprocesadores, utilizando menos memoria que un promedio convencional y resultando de más rápida resolución.

$$P[n] = P[n-1] + (e[n] - P[n-1]) / N, \quad (1)$$

Como característica particular, el promedio EWMA da a las muestras más recientes una ponderación mayor que las antiguas, resultando su comportamiento correspondiente a un filtro tipo IIR (Infinite-duration Impulse Response).

Si la señal de ruido que afecta a la entrada presenta valor medio cero, este filtro cancela sus efectos a su salida. Se ha supuesto que el ruido superpuesto a la señal de entrada es de tipo Gaussiano, con valor medio cero y varianza  $\sigma^2$  conocida (o estimada).

Nótese que para  $N=1$ , resulta  $P[n] = e[n]$ , por lo que el filtro devuelve la medición instantánea, sin promediar.

#### 2.2. El control dEWMA

El controlador propuesto se denomina dEWMA-PID siendo que está basado en al clásico PID, a la vez que incluye un filtro EWMA cuya constante de promedia-

ción N se modifica *dinámicamente*, entre el valor unitario y un valor máximo del que se hablará más adelante.

La expresión del controlador propuesto es de la forma:

$$U[n] = K_p \cdot P[n] + K_i \cdot T_s \cdot I[n] + K_d/T_s \cdot D[n], \quad (2)$$

Donde P[n] es la estimación dEWMA del error e[n], I[n] la variable integral, y D[n] la derivativa, calculadas cada intervalo Ts como se detalla a continuación.

La **variable proporcional P[n]** se calcula a partir de la siguiente expresión:

$$P[n] = P[n-1] + (e[n] - P[n-1]) / N[n], \quad (3)$$

Donde la constante de Promediación N cambia de valor según las siguientes reglas de control, si se cumple que:

$$|e[n]| < \sigma \quad (4)$$

Siendo  $\sigma$  es el desvío estándar del ruido. Entonces N se ve aumentado por un *factor de adaptación* fa de modo que:

$$N[n] = fa * N[n-1] \quad (5)$$

Y si se cumple que:

$$|e[n]| \geq \sigma \quad (6)$$

N se reduce:

$$N[n] = N[n-1] / fa \quad (7)$$

Para  $1 \leq N \leq N_{max}$

El valor mínimo de la constante de promediación N, es igual a 1 ( $P[n] = e[n]$ ), siendo también el valor inicial adoptado. El *factor de adaptación* con el cual se incrementa o decrecienta se elige de valor cercano a la unidad (en nuestro caso se utiliza  $fa=1,01$  tanto en las simulaciones como en el programa en microcontrolador).

La **variable derivativa D[n]**: se calcula como la diferencia de los valores promediados

$$D[n] = P[n] - P[n-1], \quad (8)$$

Puede observarse que, con N cercano a la unidad (régimen transitorio), esta expresión arroja valores similares a los de del término derivativo de un PID digital clásico. Por otra parte, a medida que N crece (régimen permanente) la variable diferencial se calcula con los valores filtrados y tiende a anularse.

**La variable Integral I[n]:** En el PID estándar la variable integral i[d] se calcula como acumulación de muestras mientras que en el dEWMA-PID, I[n] se calcula como:

$$I[n] = I[n-1] + e[n] - I[n-1] / N[n] \quad (9)$$

Que difiere de la ecuación del EWMA en que la señal de error no está dividida por la constante de promediación, por lo que puede expresarse entonces como

$$I[n] = N[n] \cdot P[n] \quad (10)$$

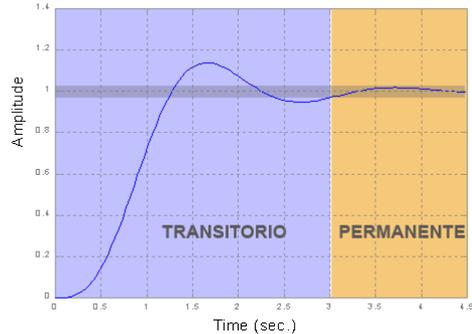
La ventaja de esta implementación de la Integral consiste en que para valores de N cercanos a la unidad (régimen transitorio), el término no “acumula” error, y se comporta de la misma manera que el proporcional.

A medida que el sistema se acerca al régimen permanente, la ecuación se comporta como una sumatoria.

Si algún cambio de consigna o perturbación lleva a la señal fuera de la banda de error permitida, el valor de N decrece, y lo mismo ocurre con la variable integral, haciendo innecesaria una rutina *Anti Wind-up*.

A diferencia de la ecuación clásica de sumatoria de errores, esta converge a un valor finito. Suponiendo que el error, en promedio, es igual que un valor  $\xi$  pequeño y distinto de cero, entonces el término integral tiende a  $N * K_i * \xi$ .

**Interpretación:** Este sistema de control presenta un doble comportamiento, en función del valor de la constante de promediación N.



Mientras N presenta valores cercanos a la unidad, el sistema se encuentra en régimen transitorio, y se comporta como un control tipo PD, ya que el término integral no acumula y actúa tan solo como un refuerzo del proporcional (sin necesidad del *Anti Wind-up*), mientras que el término derivativo cumple con la definición de “derivada”.

Cuando N crece, y por lo tanto el sistema se acerca al régimen permanente, el término derivativo queda filtrado y tiende a anularse, mientras que el integral crece (en función de N), reforzando la acción proporcional para alcanzar el valor de consigna, comportándose el sistema como un Control Automático de Ganancia (CAG).

Este sistema se puede interpretar también, como un sistema de control conmutado en donde la transición entre el estado transitorio y el régimen permanente se realiza en forma suave y sin saltos.

De lo que se observa que N cumple las funciones de “indicador de Estado” del sistema, lo cual resulta particularmente útil en aplicaciones de robótica donde es necesario determinar cuando se ha alcanzado la condición de consigna.

### 2.3 Método de Sintonía

La *sintonización* de un controlador consiste en la selección de sus parámetros de modo que se cumplan las especificaciones de operación.

Es condición de diseño del dEWMA-PID, asegurar que en caso de que la señal de control se aleje del valor de consigna (ya sea en el régimen transitorio o porque se ha salido de la banda de error permitida), la respuesta sea lo más rápida posible, por lo que la constante de promediación se reduce, hasta alcanzar en el límite inferior, el valor unitario, comportándose entonces el control como un Proporcional-Derivativo.

Siendo que esta condición es la de inicio, y la de mayor velocidad de respuesta, se la toma como referencia para el ajuste de los parámetros Kp y Kd.

Asignando valor unitario a la constante de promediación (N=1), y anulando la constante Integral (Ki=0), se verifica si el sistema es estable y se procede al ajuste de las constantes del PD, utilizando para ello los métodos clásicos de sintonía (Por ejemplo método de Ziegler-Nichols [2]), obteniéndose un valor óptimo de Kp\* y de Kd\*.

Como la acción derivativa tiene peso principalmente en el Transitorio, Kd\* se adopta como el valor Kd del controlador.

$$U[n]=Kp.P[n]+Ki.Ts.N.P[n]+Kd/Ts.(P[n]-P[n-1]) \quad (11)$$

Para N=1 y para Valores normalizados a Ts

$$U[n]= Kp.e[n]+ K'i.e[n]+ Kd'.(e[n]-e[n-1]) \quad (12)$$

Si embargo Kp\* debe “repartirse” entre Kp y Ki del controlador, ya que en el transitorio (N=1) el término integral se suma en efecto al Proporcional, pudiendo agruparse a las dos constantes en una sola.

$$U[n]= (Kp + Ki) .e[n] + Kd.(e[n]-e[n-1]) \quad (13)$$

De lo que queda que Kp\*= Kp + Ki. Sin perder generalidad, se puede adoptar Kp = Ki, y a cada una de ellas se le asigna el 50% de Kp\*

A los efectos prácticos el valor que puede tomar N está limitado por la capacidad de cálculo del microprocesador, y también puede asignarse un valor límite arbitrario de modo de asegurarse que ante una perturbación no sea necesario mucho tiempo para volver a alcanzar la condición de N unitario.

Sin embargo, siendo que como se dicho antes la ecuación del término integral tiende a  $N * Ki * \xi$ , y cuanto mayor es N, más se asemeja el término a una sumatoria, no es conveniente limitar demasiado este valor.

En síntesis, para la sintonía:

- Se asigna el valor N=1 y Ki=0
- Se determinan las constantes Kp\* y Kd\* utilizando un método clásico de sintonía para un controlador PD.
- Se asigna

$$\begin{aligned} Kp &= 0.5 \cdot Kp^* \\ Kd &= Kd^* \\ Ki &= 0.5 \cdot Kp^* \end{aligned}$$

Es de notar que el término integral calculado como se propone converge a un valor finito (y no a infinito como ocurre con la sumatoria de errores), por lo que es posible que se deba elegir un Ki de modo que, en relación con el N máximo asignado, asegure la acción de corrección integral necesaria.

$$I[n] \rightarrow N \cdot Ki \cdot \xi > \text{Acción deseada} \quad (14)$$

Donde N tiende a ser Nmáximo, en el régimen permanente;  $\xi$  corresponde a la máxima precisión de la medición y la *Acción deseada* resulta ser el valor mínimo a la salida del controlador que provoca la corrección buscada.

### 2.4 Análisis de Estabilidad

Siendo que el valor de N “evoluciona” creciendo o decreciendo según la aplicación de una Regla, el sistema puede representarse como una serie de controladores, cada uno con su propio N constante, conmutados en forma ascendente o descendente (según criterio de la Regla de control).

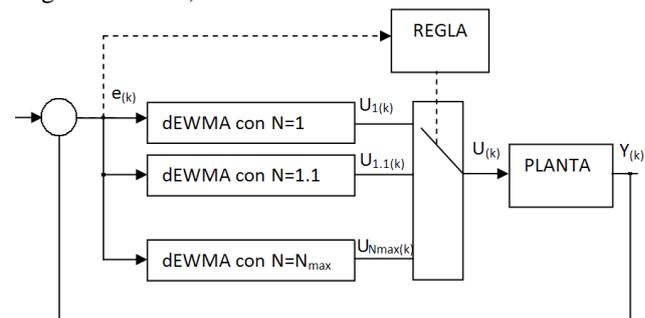


Figura 2: Esquema de múltiples controladores

El N no actúa en forma directa sobre la variable de salida, sino que regula el nivel de promediación de la señal de entrada, por lo que los cambios entre controladores de distinto N no producen saltos o variaciones bruscas de la variable controlada.

Es condición *necesaria* para asegurar la estabilidad global del sistema (aunque no *suficiente*), verificar que cada bloque controlador, por separado, no presenta inestabilidad al actuar sobre la planta que se desea controlar [3].

La utilización de fórmulas recursivas simplifica la implementación en forma de algoritmo en un microcontrolador, pero dificulta el estudio de la estabilidad con las herramientas clásicas de análisis, por lo que se procedió a expresar la función de transferencia en términos de la frecuencia discreta z.

Es posible representar al filtro EWMA con la siguiente ecuación:

$$P(z) = \left( \frac{\frac{1}{N}}{1 - \left(1 - \frac{1}{N}\right) \cdot z^{-1}} \right) \quad (15)$$

Reemplazando cada término por su correspondiente versión discreta se llega a un modelo como el que se detalla a continuación:

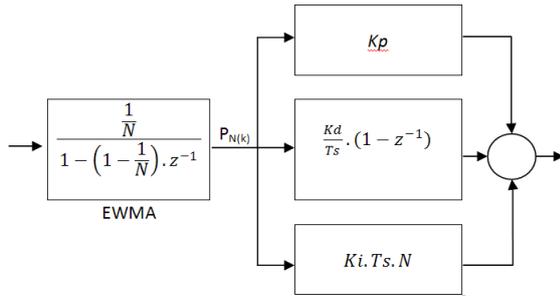


Figura 3: Esquema discreto del dEWMA-PID

La transferencia del controlador queda expresada por:

$$\frac{U(z)}{e(z)} = \left( \frac{\frac{1}{N}}{1 - \left(1 - \frac{1}{N}\right) \cdot z^{-1}} \right) \cdot \left[ Kp + \frac{Kd}{Ts} \cdot (1 - z^{-1}) + Ki \cdot Ts \cdot N \right] \quad (16)$$

Operando algebraicamente se llega a:

$$\frac{U(z)}{e(z)} = \frac{\left( Kp + \frac{Kd}{Ts} + Ki \cdot Ts \cdot N \right) - \frac{Kd}{Ts} \cdot z^{-1}}{N - (N-1) \cdot z^{-1}} \quad (17)$$

Se comprueba que si N=1 (transitorio), se obtiene la ecuación de un PD,

$$\frac{U(z)}{e(z)} = (Kp + Ki) + \frac{Kd}{Ts} \cdot (1 - z^{-1}) \quad (18)$$

Y si Si  $N \rightarrow \infty$  (permanente), la expresión discreta toma comportamiento Integral

$$\frac{U(z)}{e(z)} = \frac{Ki \cdot Ts}{1 - z^{-1}} \quad (19)$$

Se analizó la estabilidad del sistema, suponiendo una planta de segundo orden y una realimentación unitaria.

$$Gp(z) = \frac{K_o}{(z - P_{p1})(z - P_{p2})} \quad (20)$$

Donde  $K_o$ ,  $P_{p1}$ ,  $P_{p2}$  son la constante y los polos de la planta, respectivamente.

$$\frac{Y(z)}{e(z)} = \frac{Gc(z) \cdot Gp(z)}{1 + Gc(z) \cdot Gp(z)} \quad (21)$$

$$\frac{Y(z)}{e(z)} = \frac{\frac{K_c \cdot (z - C_c)}{s \cdot (z - P_c)} \cdot \frac{K_o}{(z - P_{p1})(z - P_{p2})}}{1 + \frac{K_c \cdot (z - C_c)}{s \cdot (z - P_c)} \cdot \frac{K_o}{(z - P_{p1})(z - P_{p2})}} \quad (22)$$

La función de transferencia presenta un polinomio característico (denominador) de tercer orden. Para que el sistema sea estable todas las raíces de dicho polinomio deben estar dentro del círculo unitario (*Criterio de Schur-Cohn* [4]).

Siendo el polinomio característico de la forma:

$$Den_{(z)} = a_0 z^3 + a_1 z^2 + a_2 z + a_3 \quad (23)$$

Se trata de observar si se cumplen las condiciones necesarias para la estabilidad propuestas por el *Criterio de Jury* [5], para el caso de N=1, y para N>1.

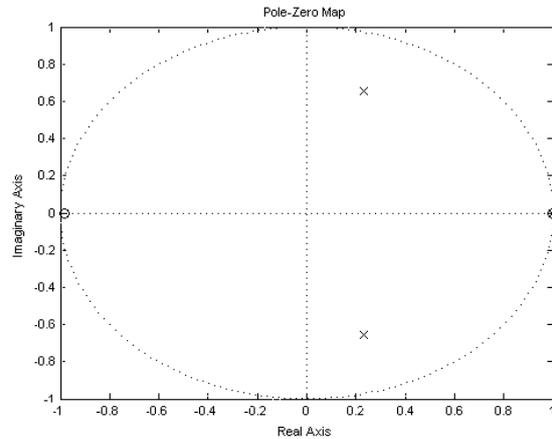


Figura 4: Diagrama de polos y ceros para N=1

Para asegurar que el sistema no tenga algún polo fuera del círculo unitario se debe cumplir (*condición necesaria, no suficiente*)

1.  $|a_3| < a_0$
2.  $Den_{(1)} > 0$
3.  $Den_{(-1)} < 0$

De la primera condición se obtiene

$$|a_3| = \left| -\frac{K_o.Kd}{N.Ts} - \frac{(N-1).P_{p1}.P_{p2}}{N} \right| < 1 = a_0 \quad (24)$$

Para N=1 debe cumplirse que  $\frac{K_o.Kd}{Ts} < 1$  (25)

$$\frac{\left(\frac{K_o.Kd}{Ts}\right)}{N} + \frac{(N-1)}{N} \cdot P_{p1} \cdot P_{p2} < 1 \quad (26)$$

Puede observarse que si la condición se cumple para N=1, (ec. 9) también será cierta para cualquier valor de N mayor, siempre y cuando:

$$P_{p1} \cdot P_{p2} < 1 \quad (27)$$

De la condición 2 resulta

$$Den(1) = 1 - \frac{N-1}{N} - P_{p1} - P_{p2} + \frac{N-1}{N} \cdot P_{p1} + P_{p1} \cdot P_{p2} + P_{p2} \cdot \frac{N-1}{N} + \frac{K_o.Kd}{N.Ts} - \frac{N-1}{N} \cdot P_{p1} \cdot P_{p2} - \frac{K_o.Kd}{N.Ts} > 0 \quad (28)$$

$$Den(1) = 1 - \frac{N-1}{N} - P_{p1} - P_{p2} + \frac{N-1}{N} \cdot P_{p1} + P_{p1} \cdot P_{p2} + P_{p2} \cdot \frac{N-1}{N} - \frac{N-1}{N} \cdot P_{p1} \cdot P_{p2} > 0 \quad (29)$$

Para N=1;

$$Den_{N=1}(1) = 1 - P_{p1} - P_{p2} + P_{p1} \cdot P_{p2} > 0 \quad (30)$$

Puede verse que si esto se cumple para N=1, se cumple para cualquier valor de N>1

$$Den(1) = Den_{N=1}(1) - \frac{N-1}{N} (1 - P_{p1} - P_{p2} + P_{p1} \cdot P_{p2}) > 0 \quad (31)$$

$$Den(1) = Den_{N=1}(1) - \frac{N-1}{N} (Den_{N=1}(1)) > 0 \quad (32)$$

Se observa que para valores grandes de N el Den(1) tiende a cero, por lo que el sistema estaría en un límite de estabilidad, lo cual tiene lógica siendo que aumentar el N significa también aumentar la Ganancia del controlador. Esta condición de estabilidad marginal no afecta el desempeño del control, ya que ante cualquier varia-

ción brusca de la señal, el N se reduce y se pasa a una condición de mayor estabilidad.

De la misma forma la condición 3 arroja como resultado

$$Den(-1) = Den_{N=1}(-1) + \frac{N-1}{N} (Den_{N=1}(-1)) < 0 \quad (33)$$

Que presenta características análogas a las de la condición 2.

De este análisis se desprende que las ecuaciones (25) y (30), son condiciones *necesarias* para la estabilidad con N=1, y que si se cumple además la ecuación (27) lo son también para el sistema en todos sus estados (N>1).

El *Criterio de Jury* contempla también una condición *suficiente* por la cual se asegura la estabilidad del sistema, pero si la ecuación característica sobre la cual se realiza el análisis es de un orden mayor a dos, el cálculo simbólico alcanza gran complejidad y su aplicación resulta poco práctica.

#### 2.4.1 Análisis Gráfico de la Estabilidad

Los métodos gráficos de análisis de estabilidad utilizan una ganancia variable (K) para obtener los puntos del diagrama donde se ubican las posibles raíces de la transferencia.

En el caso que se analiza, la variable de referencia es N, ya que actúa como ganancia, a la vez que modifica la posición de las singularidades del controlador.

Se observa que, a medida que crece N, los polos de la transferencia se ubican más cerca del límite unitario, lo cual se condice con el aumento de ganancia esperado y con la tendencia a una estabilidad marginal cuando la salida se encuentra muy cerca del valor de consigna.

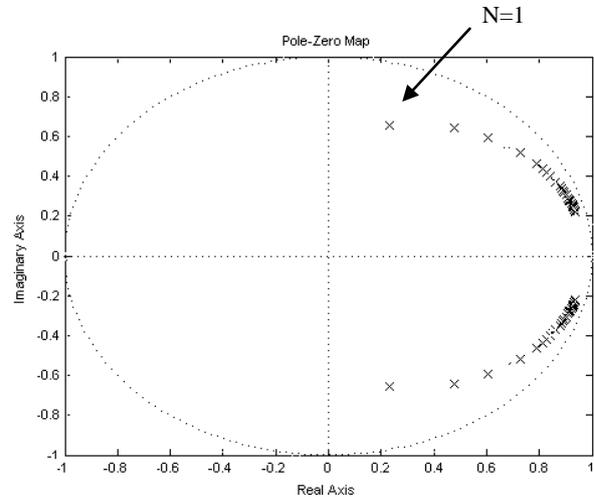


Figura 5: Evolución de singularidades en función de N

## 2.5 Discusión

Habiendo analizado las condiciones que deben observarse para que cada bloque controlador dEWMA, con  $N$  constante, no presente inestabilidades, queda por demostrar que la conmutación entre los mismos no introduce una condición de inestabilidad global.

Existen varios métodos de análisis de estabilidad para sistemas conmutados, donde los más utilizados se basan en la teoría de Lyapunov [6].

Debe tenerse en cuenta que la conmutación se realiza entre bloques que presentan la misma ecuación de control, difiriendo tan solo en el valor de  $N$  del nivel de promediación que cada uno hace de la señal de entrada.

A su vez la Regla o criterio de cambio del  $N$  solo permite cambiar a un controlador de  $N$  "inmediatamente" superior o inferior, por lo que no existe una conmutación arbitraria entre los distintos bloques controladores.

## 3. CONCLUSIONES

Se ha presentado un método de control basado en un filtro EWMA con una constante de promediación ( $N$ ) que se modifica dinámicamente (dEWMA) y toma un valor pequeño para el régimen transitorio, aumentando a medida que el sistema evoluciona hacia el valor de consigna.

Se explicaron los pasos a seguir para la sintonización del dEWMA-PID, basados en criterios clásicos usados para ese fin.

Intuitivamente, se esperaba que la inclusión de un filtro pasa bajos con un polo cuya posición con respecto a las otras singularidades se modifica dinámicamente en función del valor de  $N$ , aumente el margen de estabilidad del sistema.

Si bien el análisis para distintos valores de  $N$  indica que se mantendrá estable si se cumplen las condiciones presentadas (Ec 25, 27 y 30), el nivel de promediación variable garantiza a su vez que de darse una condición de inestabilidad, el sistema evolucionará hacia un valor de  $N$  que garantice la estabilidad, si es que el sistema es estable con un controlador PD ( $N=1$ ). El sistema PID presentado es de fácil implementación y sintonía, no necesita filtros adicionales de la señal de entrada ni manejo de excepciones como la rutina de antiwindup, presenta una muy buena respuesta temporal y error permanente proporcional al ruido del sensor de entrada, reduciendo además el accionamiento del actuador final.

## REFERENCIAS

- [1] C.Verrastro, J.C. Gomez, S. Alberino y P. Folino "Control PID con Filtro Dinámico de Promedios Móviles Ponderados Exponencialmente". XIIIª Reunión de Trabajo en Procesamiento de la Información y Control, Universidad Nacional de Rosario, Septiembre 2009
- [2] J.G. Ziegler and N.B. Nichols, *Optimum setting for automatic controllers*. Trans. ASME 64, 1942
- [3] D. Liberzon and S. Morse, *Basic problems in stability and design of switched systems*, IEEE Control Systems Magazine, 1999
- [4] B.C. Kuo. *Sistemas de control automático*. Prentice Hall Hispanoamericana, 7 edition, 1996, pp. 345-351
- [5] Jury, E. I. *Theory and Applications of the Z-Transform Method*. New York: Wiley, 1964.
- [6] Hai Lin, and Panos J. Antsaklis, *Stability and Stabilizability of Switched Linear Systems: A Survey of Recent Results*, IEEE transactions on automatic control, 2008