

## Control PID con esquema adaptivo de filtrado de ruido

Claudio Verrastro<sup>†</sup>, Sergio Alberino<sup>‡</sup> y Pablo Folino<sup>‡</sup>

<sup>†</sup>Grupo de Inteligencia Artificial UTN-FRBA, Buenos Aires, Argentina  
CNEA, Centro Atómico Ezeiza  
cverra@cae.cnea.gov.ar

<sup>‡</sup>Grupo de Inteligencia Artificial UTN-FRBA, Buenos Aires, Argentina  
Alberino@argentina.com, pfolino@hotmail.com

**Resumen—** En un sistema de control PID, el comportamiento general, está limitado por la precisión y el ruido presente en la variable de entrada al controlador  $e(t)$ , estos problemas son particularmente severos en el cálculo de la derivada, para solucionar este problema, se propone un filtro de promedio móvil ponderado exponencialmente, cuya constante de promediación esta gobernada por el ruido de las mediciones de entrada y por la velocidad de variación del sistema. Se extiende este algoritmo para un mejor cálculo de la derivada en términos de ruido. Por otro lado, este filtro a la entrada del controlador PID le confiere cierta capacidad de adaptación frente a cambios en la planta y en la variable de entrada.

**Palabras Clave—** PID, Moving Average, Muestreo Adaptivo, IIR, EWMA.

### I. INTRODUCCIÓN

El control Proporcional Integral Derivativo (PID) es la solución mas difundida para sistemas de control. Ofreciendo una gran libertad de acción al tener tres parámetros ( $K_p$ ,  $K_i$  y  $K_d$ ) para ajustar el lazo. El control PID es un método probado y aplicado con éxito en muchos sistemas de control, existe abundante información y ejemplos de aplicación (Wescott, 2000).

El PID tiene una acción proporcional a la señal de error  $e(t)$ , que es la diferencia entre la salida de la planta y el valor deseado, el término integral corrige el error permanente y el término derivativo mejora la respuesta en el transitorio, disminuyendo el tiempo de establecimiento.

La ecuación de la salida del Controlador  $y(t)$ , en su forma posicional se puede expresar como (Ogata y Katsuhiko, 1998):

$$y(t) = K.e(t) + K/T_i \int e(t) dt + K.T_d. d(e(t))/dt, \quad (1)$$

Donde:

$K$  = Constante del control proporcional.

$T_d$  = Contante tiempo diferencial.

$T_i$  = Constante de tiempo de integración.

$e(t)$  = Error de posición (salida actual – salida deseada).

Cuando se trata de un control a tiempo discreto, la integral, se calcula como sumatoria y la derivada, como diferencia (Kuchen, et al. 1988b).

$$y[n] = K . e[n] + K/T_i . i[n] + K T_d. d[n], \quad (2)$$

$$d[n] = (e[n] - e[n-1])/T_s, \quad (3)$$

$$i[n] = T_s. \sum e[n], \quad (4)$$

$e[n]$  = Error de posición (posición actual – posición deseada).

$e[n-1]$  = Error de posición del ciclo anterior.

$i[n]$  = Sumatoria de los errores de posición.

$d[n]$  = Diferencia de los errores de posición.

$T_s$  = Intervalo de muestreo.

Esta ecuación, se calcula a período fijo  $T_s$ , es el tiempo en que se cierra el lazo de control, típicamente consiste en 5 pasos:

- Muestreo de las variables de Entrada.
- Escalado y cálculo de magnitudes intermedias.
- Cálculo del algoritmo de control (Ec. 2).
- Escalado de variables de Salida.
- Actualización de las Salidas.

Para fijar el tiempo  $T_s$ , se debe tener en cuenta las características de frecuencia de la planta, las reglas del arte fijan, generalmente (Wescott, 2000):

$$T_s = T_p/10, \quad (5)$$

Donde  $T_p$ , es la constante de tiempo dominante de la planta. La razón subyacente en esta regla, es que se desea que el controlador actúe en al menos 10 puntos intermedios durante el transitorio, evitando que la acción de control introduzca saltos bruscos a la salida de la planta.  $T_p$  se puede extraer de las ecuaciones de la planta, cuando estas son conocidas, o por ensayo, determinado el tiempo de establecimiento al escalón.

Así elegido  $T_s$ , el sintonizado del sistema de control PID, puede reducirse a encontrar valores adecuados para las tres constantes características del sistema.

$$\begin{aligned} K_p &= K \\ K_i &= K/T_i \\ K_d &= K T_d \end{aligned}$$

En la literatura (Kuchen et al., 1998) existe una multiplicidad de criterios que facilitan el ajuste del sistema (p.e. Método de Ziegler-Nichols)

La variable de entrada al controlador, el error  $e[n]$ , es una magnitud calculada como la diferencia entre la salida deseada (valor de la consigna) y el valor de salida real de la planta (valor medido). Cuando la planta se aproxima al estado estacionario,  $e[n]$  es un valor pequeño, pero con error relativo grande (generalmente el instrumento de medición de la variable de salida se especifica con un error porcentual a fondo de escala); si además, se debe calcular la diferencia  $e[n] - e[n-1]$ , donde  $e[n-1]$  es la muestra anterior, el resultado es muy inestable. Para mitigar estos efectos es usual emplear filtros pasa bajos.

En el cuerpo de este trabajo se propone el uso de un filtro de tipo IIR de media móvil, con frecuencia de corte ajustable en función del error del transductor y del valor de  $e[n]$  como se indica en la Fig. 1.

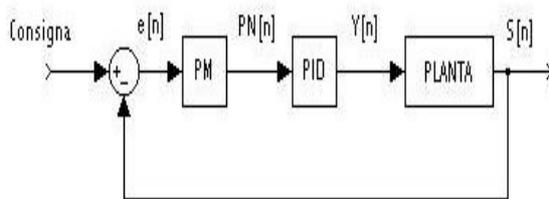


Figura 1: Lazo de control con Filtro de media móvil

En la sección II, se describen algunas propiedades de la media móvil y se propone el método para el ajuste de la frecuencia de corte del filtro

En la sección III, se describe una implementación en el control de dirección y tracción de un robot móvil.

En la Sección IV, se discuten las conclusiones.

## II. DESARROLLO

### A. La media móvil

La técnica de la media móvil o *moving average* es muy utilizada para obtener promedios sobre muestras a medida que estas “van ingresando”. La idea del promedio consiste en tomar  $N$  muestras, sumarlas y dividir las por  $N$ . El promedio es “movil” cuando se recalcula cada vez que se obtiene una nueva muestra tomando las  $N$  muestras anteriores.

Por razones de economía de memoria y velocidad de cálculo muy a menudo se adopta la fórmula recursiva

$$PN[n] = PN[n-1] - PN[n-1]/N + e[n]/N$$

Donde:

$e[n]$  es la medición del error en el instante  $n$ .

$N$  es la constante del promedio móvil.

$PN[n]$  es la estimación filtrada del error en el instante  $n$ .

$PN[n-1]$  es la estimación filtrada del error en el instante anterior.

De esta manera no es necesario mantener  $N$  posiciones de memoria con las muestras anteriores de la señal, solo se necesita el valor anterior del promedio,  $PN[n-1]$ . Para calcular el nuevo promedio  $PN[n]$ , se descuenta la  $n$ -ésima parte del promedio anterior y se adiciona la  $n$ -ésima parte de la muestra actual. Reescribiendo la fórmula anterior con una sola división se obtiene una mejora en el tiempo de cómputo.

$$PN[n] = PN[n-1] + (e[n] - PN[n-1])/N, \quad (6)$$

La expresión (6) corresponde a un Promedio Móvil Ponderado Exponencialmente (PMPE) o Exponencialy Weighted Moving Average (EWMA),. las muestras más recientes tienen una ponderación mayor que las antiguas que como se puede ver en Proakis y Manolakis, (1998), corresponde a un filtro tipo IIR (Infinite-duration Impulse Response).

La expresión analítica de la respuesta un escalón  $e[0]$  es:

$$PN[n] = e[0].(1 - ((N-1)/N)^{n+1})$$

Este promedio móvil tiene características de un filtro pasa bajos.

Para caracterizar su respuesta temporal, se describe la respuesta al escalón con una fórmula muy aproximada (Crenshaw, 1996):

$$PN[n] = e[0].(1 - e^{-n/N})$$

El promedio móvil alcanzará  $1-1/e$  de su valor final después de  $N$  muestras, a este valor  $N$  se llamará constante de promediación del filtro, producirá un retardo  $\tau$ :

$$\tau = N. T_s, \quad (7)$$

El retardo introducido por el filtro, será proporcional al tiempo entre muestras (que se supone fijado por la eq. 5) y a la constante de promediación  $N$ , que se ajustará con criterios que se describen mas adelante.

El promedio móvil, se utiliza por su características de filtrado del ruido superpuesto a la señal, que si es de características aleatorias y de valor medio nulo, cuando se promedian varias mediciones, el ruido tiende a cancelarse. Cuanto mayor sea la constante de promediación, mejor será el efecto de cancelación de ruido (Smith., 1997).

Para su análisis se supone que la medición de la variable de entrada  $e[n]$  tiene superpuesto ruido de características gaussianas, de valor medio nulo y varianza  $\sigma_r^2$ . Para la determinación de  $\sigma_r$ , se pueden usar herramientas estadísticas, como realizar  $M$  mediciones, y determinar el desvío estándar de estas mediciones con

respecto al valor medio, o bien, asignarle a  $\sigma_r$  un valor empírico, estimado por medio de la observación de la señal en un osciloscopio. Además del ruido eléctrico, se debe considerar el ruido de cuantización producido por la conversión A/D de  $S[n]$ , que también tiene valor medio nulo y varianza  $\sigma_c^2 = \Delta/12$ , normalmente  $\Delta$  es 1 LSB (p.e. para un conversor de 8 bits que mide una variable analógica de 5V, es  $\Delta = 5V/256$ ) (Carbone P. et al.). Se puede suponer que  $\sigma_c$  y  $\sigma_r$  son estadísticamente independientes, entonces, la varianza total de la medición es la suma de las varianzas.

$$\sigma^2 = \sigma_r^2 + \sigma_c^2$$

Teniendo en cuenta que, el comportamiento del PMPE en cuanto a reducción de la varianza del ruido, es similar al promedio de N mediciones. Se puede expresar que la varianza del PMPE

$$\sigma_{PN}^2 \cong (\sigma_r^2 + \sigma_c^2) / N, \quad (8)$$

Existe un compromiso entre el retardo introducido por el promedio móvil  $PN[n]$  expresado por la Ec. 7 y la reducción de la varianza expresada por la Ec. 8. Se deberá encontrar entonces, un valor de N que reduzca el ruido de las mediciones, al mismo tiempo que el retardo introducido sea compatible con la operación normal del sistema. Por otra parte el desvío estándar de la medición filtrada  $\sigma_{PN}$  se puede tomar como la incertidumbre o error cometido al estimar la variable  $e[n]$  por medio del promedio  $PN[n]$ . Como es una variable estadística esto es válido solo en el 67% de las mediciones, si se quiere una confianza de 99,7 % se debería tomar  $3 \sigma_{PN}$ . Una muy buena referencia se puede encontrar en el capítulo 3 de Knoll (1989)

Este mismo análisis se puede hacer desde el punto de vista del compromiso que existe entre ancho de banda del filtro y del corrimiento de fase introducido. A menor ancho de banda, mejores características de filtrado pero mayor retardo introducido.

## B. Solución propuesta

Para determinar la constante de promediación N óptima de filtro durante la evolución del sistema, se realizan mediciones  $e[n]$  a tiempo constante  $T_s$  a la máxima tasa de muestreo disponible en el conversor A/D y con  $T_s \leq T_p/10$ , para cumplir con los requerimientos del sistema. A esta medición se la llama instantánea y se supone que tiene un desvío estándar dado por:

$$\sigma = (\sigma_r^2 + \sigma_c^2)^{1/2}, \quad (9)$$

Simultáneamente se computará el promedio móvil  $PN[n]$  con constante de promediación N y el promedio  $P2N[n]$  de constante de promediación  $2.N$ .

Para simplificar el cálculo de las ecuaciones por sumas y desplazamientos, se adopta  $N = 2^j$  ( $j=0,1,\dots,k$ ).

El desvío estándar de  $PN[n]$  es:

$$\sigma_{PN}[n] \cong \sigma/\sqrt{N}, \quad (10)$$

En el instante n,  $PN[n]$  será considerado el “promedio corriente” y la mejor estimación disponible de la variable de entrada, empleada para calcular la variable de salida computando la Ec. (2).

Para que  $PN[n]$  sea válido deberá cumplir con el siguiente requisito:

$$|PN[n] - e[n]| \leq \sigma, \quad (11)$$

El promedio corriente para ser válido, debe estar dentro de la banda de ruido de la medición instantánea.

Si este requisito no se cumple se adoptará  $N[n+1] = N[n]/2$ , es decir se reducirá a la mitad la constante de promediación del promedio corriente.

En cambio si el requisito anterior se satisface se podrá adoptar un promedio corriente mejor filtrado si además se cumple que:

$$|PN[n] - P2N[n]| \leq \sigma/\sqrt{N}, \quad (12)$$

Para poder adoptar  $N[n+1] = 2.N[n]$  el promedio  $P2N[n]$  deberá caer dentro de la banda de ruido del promedio corriente.

Con este procedimiento se logran mediciones rápidas (y ruidosas) cuando el sistema esta evolucionando en forma rápida y mediciones muy bien filtradas (y lentas) cuando el sistema se encuentra dentro de la banda de ruido de las mediciones instantáneas.

Con este ajuste se busca tomar ventaja del conocimiento previo del error de las mediciones. Cuando el sistema evoluciona en forma rápida  $e[n]$  es grande (su error relativo es menor), en cambio cuando el sistema se aproxima a su punto de equilibrio  $e[n]$  decrece (crece el error relativo) pero hay mas tiempo para mejorar la estimación y se aumenta la constante de promediación de  $PN[n]$ . Pero en este caso el comportamiento global del PMPE será no lineal porque el coeficiente de promediación (N) cambia con el tiempo (Proakis y Manolakis, 1998).

## C. Cálculo de los términos proporcional integral y derivativo

i) Cálculo del término proporcional  $e[n]$

Para el cálculo de la Ec.(2), se adopta como mejor estimación error disponible al promedio corriente.

$$e[n] = PN[n] \quad (13)$$

ii) Cálculo del término diferencial  $d[n]$

Para el cálculo del término diferencial se computan tres promedios móviles, definidos de la misma manera que en la Ec. 6.

El filtro corriente:

$$PN[n] = PN[n-1] + [e[n] - PN[n-1]]/N, \quad (14)$$

El filtro de doble constante:

$$P2N'[n] = P2N'[n-1] + [e[n] - P2N'[n-1]]/2N, \quad (15)$$

Y el filtro de constante mitad:

$$PN:2'[n] = PN:2'[n-1] + 2 \cdot [e[n] - PN:2'[n-1]]/N, \quad (16)$$

De acuerdo a la Ec. (3) el término diferencial  $d[n]$  se calcula almacenando el valor anterior  $e[n-1]$ .

Utilizando las estimaciones filtradas de  $e[n]$  y teniendo en cuenta las propiedades en cuanto a retardo temporal del PMPE, se puede calcular:

$$d[n] = (PN'[n] - P2N'[n])/T, \quad (17)$$

Ya que el retardo relativo entre ambos valores es la constante de tiempo  $\tau = N \cdot Ts$  del promedio corriente. De esta manera se calcula el término diferencial con el mejor filtrado disponible.

Por otra parte para mantener la continuidad del término derivativo cuando aumenta la constante de promediación del filtro, en el instante  $n$  determinado por la Ec. 12, se realiza la siguiente sustitución.

$$\text{Si} \quad N[n+1] = 2N[n]$$

$$\text{Se asigna:} \quad PN'[n+1] = P2N'[n], \quad (18)$$

$$P2N'[n+1] = P2N'[n] + 2 \cdot (P2N'[n] - PN'[n]), \quad (19)$$

En cambio, cuando el sistema se aparta de su condición de equilibrio y se debe disminuir la constante de promediación, en el instante determinado por la Ec. 11, se realiza la siguiente sustitución.

$$\text{Si:} \quad N[n+1] = N[n]/2$$

$$\text{Se asigna:} \quad PN'[n+1] = PN:2'[n], \quad (20)$$

$$P2N'[n+1] = PN:2'[n] + (P2N'[n] - PN'[n])/2, \quad (21)$$

Mantener la continuidad del término derivativo, cuando se cambia la constante  $N$  del filtro, obliga, por un lado a producir un escalón en el filtro de constante  $N$  y en el de constante  $2N$ , y por otro se debe también calcular el filtro de constante  $N/2$ . Es decir que se debe llevar el cómputo de los filtros  $PN'$ ,  $P2N'$  y  $PN:2'$  solo para el cálculo de la derivada.

### iii) Cálculo del término Integral

El término integral normalmente se calcula como acumulación de muestras  $i[n] = Ts \cdot \sum e[n]$ .

Pero en este caso, se usa la fórmula recursiva:

$$i[n] = Ts \cdot PN[n] + i[n-1], \quad (22)$$

Se debe notar que para los cálculos las Ec 17 y 22 se puede tomar como  $Ts=1$ .

Para el cómputo de los parámetros del control PID, se deben calcular dos valores,  $PN[n]$  y  $P2N[n]$ , para el cálculo del término proporcional; para el cálculo del término derivativo, tres valores,  $PN'[n]$ ,  $P2N'[n]$  y  $PN:2'[n]$  y para el término integral un valor,  $i[n]$ .

En la Ec. 12 se puede emplear  $P2N'[n]$  en lugar de  $P2N[n]$  haciendo innecesario su cálculo, además esta sustitución le confiere cierta histéresis al filtrado evitando que se aumente  $N$  demasiado rápido.

## III. REALIZACIÓN

En el marco del desarrollo de una *Plataforma Móvil para Inspección Robotizada* (PMIR), por parte del Grupo de Inteligencia Artificial (GIA), de la Facultad Regional Buenos Aires de la Universidad Tecnológica Nacional (UTN), se planteó el problema de construir un dispositivo de control de posición, para los motores que impulsan la plataforma.

El diseño se realizó para que cada motor cuente con un microcontrolador AVR, de la familia de microcontroladores Atmel, intercomunicados con un dispositivo central o "Master" que, vía serie, le envía tramas de posición (y/o velocidad), a cada motor en forma independiente.

Con la intención de reducir el error de posición, aprovechando la capacidad del microcontrolador utilizado, se implementó un control PID en forma digital

Como se desea implementar un control de posición sin sobre impulso. Para ello es de importancia ajustar las constantes del PID de modo que la respuesta resulte de amortiguamiento crítico (o sobre amortiguado).

Por las condiciones propias de la plataforma móvil, el peso y el rozamiento pueden variar, cuando ello ocurre, es necesario cambiar los valores de  $Kp$ ,  $Ki$  y  $Kd$  para volver a obtener una respuesta óptima.

En la Fig. 2, se muestra la respuesta al escalón  $S[n]$  del servo de dirección, también se muestra el promedio corriente  $PN[n]$ , del error de posición; se puede observar que el cambio de curvas se produce sin escalones, porque la Ec.12 solo cambia la constante del filtro pero no su valor instantáneo.

Los cambios de curva se producen de a uno por ciclo, y de acuerdo a la Ec. 12, tomara varios periodos  $Ts$  pasar a las curvas más filtradas, pero unos pocos para volver a la curva sin filtrar, si se han producido cambios significativos en la entrada (Ec. 11).

En otra palabras, si se produce un escalón a la entrada que supera el valor de  $\sigma$ , y además se ha respetado el criterio de la Ec. 5 el sistema de control será capaz de aumentar su velocidad de respuesta en 3 órdenes de magnitud ( $2^{10}$ ) en un tiempo  $Tp$ , Retornado lentamente al estado estacionario. Como el sistema responderá en forma suave a cambios abruptos en la consigna, y se aproximará a la condición de equilibrio también en forma suave, hace innecesario el uso de un control de velocidad de tipo trapecoidal (Bucella T.).

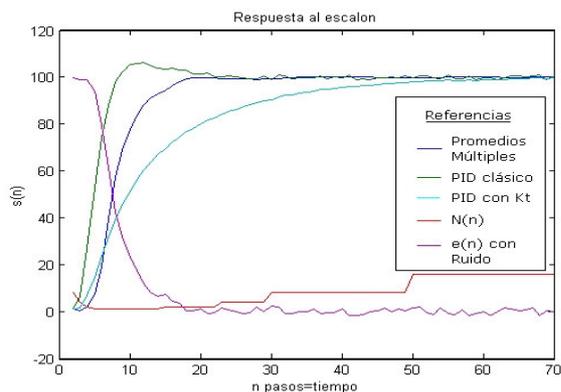


Figura 2: Respuesta al escalón del servo de posición. Trazo Rosa: señal error  $e[n]$ , Trazo Rojo: constante de promediación adaptiva  $N[n]$ , Trazo Verde:  $S[n]$  para un controlador PID clásico, Trazo Azul: Controlador con promedios múltiples adaptivos, Trazo Celeste: Controlador con filtro de media móvil con  $N=Kt$ .

En la Fig. 2 se puede observar la respuesta al escalón de posición del robot móvil. En ella se implementaron tres algoritmos. Con las mismas constantes  $K_p$ ,  $K_d$  y  $K_i$ . El PID convencional (trazo verde), es el de más rápida reacción (tiene sobrepico) y su valor permanente es ruidoso porque no posee filtrado. Si se le introduce un filtrado fijo (trazo celeste) el tiempo de establecimiento es mucho mayor pero el valor permanente es menos ruidoso.

En cambio el control implementado con promedios múltiples, si bien tiene un retardo inicial (hasta que se ajusta  $N$ ), se comporta con la misma velocidad que el control convencional en el transitorio (pero sin sobrepico), en el régimen permanente tiene muy poco ruido como el control PID con entrada filtrada.

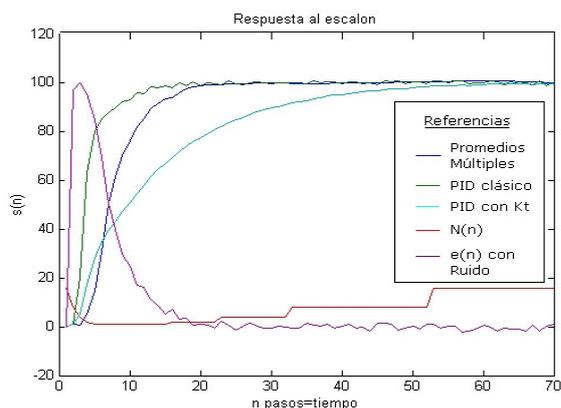


Figura 3: Idem figura 2 pero con el PID con amortiguamiento crítico.

#### IV. CONCLUSIONES

Se ha implementado un sistema cuyo lazo de control responde a tiempo variable  $\tau = N.T_s$ , que depende del apartamiento del sistema a la consigna. La velocidad de respuesta  $N$  se ajusta cada  $T_s$  por medio de una medición  $e[n]$  de “guarda” que permite establecer el

grado de apartamiento del sistema a su posición de equilibrio. Por otra parte este criterio de filtrado variable permite reducir los niveles de ruido presentes en la señal de entrada, disminuyendo el error permanente del sistema aún por debajo del ruido de digitalización del ADC, (Melkonian, 1992). Se ha extendido este criterio al cálculo del término derivativo con excelentes resultados en cuanto a sencillez en la implementación y robustez de la respuesta. Como se puede ver en la Fig 3, el comportamiento de sistema es similar aún con cambios en los parámetros del PID.

Se puede generalizar el criterio de cambio de constante del filtro dado por las Ecs. 11 y 12, a una cantidad arbitraria  $\epsilon$ , permitiendo establecer bandas, alrededor de la consigna, dentro de la cual el sistema se aproximará al valor de equilibrio en forma progresiva, fuera de la misma, el sistema, responderá en forma rápida, aunque con mayor error.

#### REFERENCIAS

Bucella T., “Servo Control of a DC-Brush Motor”, *Microchip Teknic Inc. Nota de Aplicación AN-532*

Carbone P., Petri D., “Noise-based Spectral Estimation for ADC Testing”

Crenshaw, J. W.. “All About Filters”, *Embedded System Programming pp 12-20 May (1996)*

Knoll G.F., *Radiation Detection and Measurement*, John Wiley and Sons, Singapur, (1989)

Kuchen B., Carelli R.y .Gambier A. ; *Control Digital*, pp 118-123, EBAI, Brasil (1988a)

Kuchen B., Carelli R.y .Gambier A.; *Control Digital*, pp.110-112, EBAI, Brasil (1988b)

Melkonian L., “Improving A/D Converter Performance Using Dither” *National Semiconductor, Application Note AN 804*, (1992)

Ogata, Katsuhiko, *Ingeniería de control moderno*, 3ª edición, Prentice Hall, pp. 669-692, México, (1998)

Proakis, J.G. y Manolakis, D.G. *Tratamiento digital de señales*, 3ª ed., pp. 92-118, Prentice Hall, Madrid, (1998)

Smith, S.W., “The Scientist and Engineer's Guide to Digital Signal Processing”, Technical Publishing California (1997)

Tham,M., “Discretised PID Controller”, University of Newcastle, Londres (1998 a)

Tham M.T "Dealing With Measurement Noise" University of Newcastle, Londres (1998 b)

Wescott,T. “PID Without a PhD”, *Embedded System Programming*, pp. 86-108. Oct (2000).